Государственное образовательное автономное учреждение
высшего образования Курской области
«Курская академия государственной и муниципальной службы»

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Ворошилова Ольга Леонидовна
Должность: Ректор
Дата подписания:
Уникальный программный ключ:
4cf44b5e98f1c61f6308024618ad72153c8a582b453ec495cc805a1a2d739deb

Утверждаю:
Ректор __________ И.В. Анциферова
«__» сентября ________2019 г.

**Программа вступительного испытания**
**по дисциплине «Математика»**

© Жилинкова Л.А., 2019.
© Курская академия государственной и муниципальной службы, 2019.

Курск 2019

**Программа вопросов к вступительному экзамену по математике.**

1. Степени и корни
   Определение степени и корня. Правила действия с радикалами. Правила действия со степенями. Формулы сокращенного умножения. Таблица квадратов.
2. Модуль и его свойства.
   Понятие модуля. Свойства модуля. Основные неравенства с модулем.
3. Логарифмы
   Определение логарифма. Свойства логарифмов.
4. Прогрессии.
   Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
5. Тригонометрия.
   Радианное измерение углов. Значение тригонометрических функции некоторых углов. Основные тригонометрические тождества. Формулы суммы и разности аргументов. Формулы двойного и тройного аргумента. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение. Преобразование произведение тригонометрических функций в сумму. Определение обратных тригонометрических функций в сумму. Свойства обратных тригонометрических функций. Значение тригонометрических функций некоторых углов. Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.
6. Многочлены и их корни.
   Определение многочлена. Квадратный трехчлен. Решение квадратных уравнений. Теорема Безу и схема Горнера.
7. Уравнения.
   Уравнение с одним неизвестным. Системы уравнения с двумя неизвестными. Системы линейных уравнений..
8. Неравенства.
   Неравенства и системы неравенств. Объединение неравенств. Рациональные неравенства.
9. Функции.
   Область определения. Множество значений. Четность и нечетность. Графики элементарных функций. Построение графиков с помощью элементарных преобразований. Применение свойств функций к решению уравнений.
10. Дифференциальное исчисление.
    Понятие производной. Производные основных элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Геометрический смысл производной. Механически смысл производной. Возрастание и убывание функций. Точки экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции. Применение производной к исследованию функций и построению графиков.
11. Интегральное исчисление.
    Понятие первообразной. Понятие интеграла. Таблица интегралов основных элементарных функции. Методы нахождение неопределенного интеграла. Применение первообразной (нахождение площадей плоских фигур и объемов тел вращения).
12. Планиметрия.
    Параллельные прямые. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках. Признаки равенства треугольников. Теорема о сумме углов треугольника и следствия из нее. Основные свойства признаки равнобедренного треугольника. Неравенство треугольника и следствия из него. Средняя линия треугольника. Медиана. Биссектриса. Высота. Подобие треугольников. Площади подобных фигур. Теорема Пифагора. Теорема синусов. Теорема косинусов. Площадь треугольника. Параллелограмм. Ромб. Трапеция. Окружность
13. Стереометрия.
    Аксиомы стереометрии. Параллельность в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Координаты и векторы в пространстве. Уравнение прямой. Уравнение плоскости. Перпендикулярность прямой и плоскости. Двугранный угол. Сфера.. Пирамида. Параллелепипед. Площади поверхностей фигур. Объемы многогранников.

**Рекомендации абитуриенту для подготовки к экзамену.**

Фундамент математических знаний обычно закладывается на уроках математики и при подготовке к ним. Мы советуем:

1. Внимательно выслушивать теоретический материал, который объясняет учитель. Все теоремы и факты нужно понять, а поняв, уметь их самостоятельно доказывать. Прочитав доказательство какой-то теоремы, воспроизведите это доказательство на бумаге без учебника и затем сверьте с учебником; неясные вопросы выясните у учителя. Помните, что умение решать задачи является следствием глубоко понятного соответствующего теоретического материала.
2. Выполняя домашние задания, посещая курсы по подготовке в ВУЗ, к ЕГЭ и т. д. , помните, что без собственного плана подготовки и его выполнению большие успехи вас не ждут. Составьте план и покажите его своему учителю или другому профессиональному математику.
3. Роль устных вычислений, их скорость и точность в условиях существенного ограничения времени невозможно переоценить. Мы рекомендуем для совершенствования умений и навыков устных вычислений и преобразований использовать сборник устных упражнений Р. Д. Лукина и др. Целесообразно за одно самостоятельное занятие решать (устно) по одному заданию из каждого раздела (всего в этой книге 21 раздел). В неделю рекомендуется проводить не менее двух-трех таких занятий.
4. Что нужно запоминать наизусть? Скажем так: чем больше информации вы сможете запомнить, тем лучше и быстрее вы будете выполнять как устные задания, так и задания, требующие значительных умственных усилий. Поэтому, во-первых, вы должны четко знать и понимать основные разделы школьного курса математики, основные факты, теоремы, формулы, таблицы значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций и т.д. Будет очень хорошо, если вы заведете себе личный справочник всего перечисленного и будете его систематически пополнять и повторять собранные в нем материалы.
5. Вам нужно определиться с результатом, который вы рассчитываете получить на ЕГЭ. Проконсультируйтесь по этому поводу со своим учителем или обратитесь за помощью к другому специалисту. Однако и ваше собственное представление о своих возможностях играет не последнюю роль. Желаем успехов!

## Краткий теоретический справочник.

### 1. Степени и корни.

$$a^0 = 1, a \neq 0$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$
$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$
$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$
$$a^p a^q = a^{p+q}$$
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$
$$(a^p)^q = a^{pq}$$
$$(ab)^p = a^p b^p$$

### 2. Формулы сокращенного умножения.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

3. **Таблица квадратов.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $11^2 = 121$ | $16^2 = 256$ | $21^2 = 441$ | $26^2 = 676$ |
| $12^2 = 144$ | $17^2 = 289$ | $22^2 = 484$ | $27^2 = 729$ |
| $13^2 = 169$ | $18^2 = 324$ | $23^2 = 529$ | $28^2 = 784$ |
| $14^2 = 196$ | $19^2 = 361$ | $24^2 = 576$ | $29^2 = 841$ |
| $15^2 = 225$ | $20^2 = 400$ | $25^2 = 625$ | $30^2 = 900$ |

4. **Прогрессии.**

*Арифметическая прогрессия.*

Если $a_n$ есть n-й член , d- разность и $S_n$ - сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$a_{n+1} = a_n + d$$
$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если d$> 0$, и убывает, если d$< 0$.
Если $a_k, a_l, a_m, a_n$-члены арифметической прогрессии с такими номерами, что k+l=m+n, то $a_k + a_l = a_m + a_n$
Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов, т. е. $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

*Геометрическая прогрессия.*

Если $b_n$ есть n-й член , q- знаменатель и $S_n$ - сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$b_{n+1} = b_n q, b_1 \neq 0, q \neq 0, b_n = b_1 q^{n-1}$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, q \neq 1$$

Если $b_k, b_l, b_m, b_n$ - члены геометрической прогрессии с такими номерами, что k+l=m+n, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$

Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов.$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \frac{b_1}{1-q}$.

5. **Логарифмы.**

Логарифмом данного числа x по данному основанию a называется показатель степени y, в которую нужно возвести основание a , чтобы получить данное число x: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Пусть $a > 0, a \neq 1$, то $a^{\log_a x} = x$, для $x > 0$.

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|, xy > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|, xy > 0$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, x > 0\,, y > 0$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x > 0$$

$$\log_a x^k = k \log_a|x|, k - \text{четное целое число}$$

Пусть b$> 0, a \neq 0, a \neq 1$, тогда: $\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b, p \neq 0$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_{|a|} b, k \neq 0\,, k - \text{целое четное число}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Формула перехода к новому основанию. Пусть b$> 0, b \neq 1, x > 0$. Тогда $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. В частности $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$.

При решении задач бывает полезна следующая теорема. Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, а если по разные, то $\log_a b < 0$.

## 6. Тригонометрия.

*Определение*. Один радиан равен центральному углу окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

*Значения тригонометрических функций некоторых углов.*

| $\alpha$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 |
| tg$\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | 0 | - |
| ctg$\alpha$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | - | 0 |

*Основные тригонометрические тождества.*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \text{tg}\alpha\,\text{ctg}\alpha = 1 \qquad 1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

*Формулы суммы и разности аргументов.*

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}$$

$$\text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha\,\text{ctg}\,\beta - 1}{\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\,\beta}$$

$$\text{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha\,\text{ctg}\beta + 1}{\text{ctg}\alpha - \text{ctg}\beta}$$

*Формулы двойного и тройного аргументов.*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

*Преобразование суммы и разности тригонометрических функций.*

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

*Преобразование произведений тригонометрических функций*

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

*Формулы половинного аргумента*

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

*Формулы понижения степени*

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}$$

$$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$$

*Выражения через тангенс половинного аргумента*

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

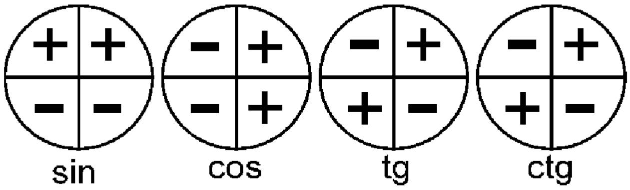
$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

*Формулы привидения*

| | $-\alpha$ | $90°-\alpha$ | $90°+\alpha$ | $180°-\alpha$ | $180°+\alpha$ | $270°-\alpha$ | $270°+\alpha$ | $360°-\alpha$ | $360°+\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi+\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ | $2\pi-\alpha$ | $2\pi+\alpha$ |
| sin | -sin α | cos α | cos α | sin α | –sin α | –cos α | –cos α | -sin α | sin α |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos | cos α | sin α | –sin α | –cos α | –cos α | –sin α | sin α | cos α | cos α |
| tg | -tg α | ctg α | –ctg α | –tg α | tg α | ctg α | –ctg α | –tg α | tg α |
| ctg | -ctg α | tg α | –tg α | –ctg α | ctg α | tg α | -tg α | -ctg α | ctg α |




*Решения простейших тригонометрических уравнений*

$\cos x = a; x = \pm \arccos a + 2\Pi n; n \in Z$

$\cos x = 0; x = \frac{\Pi}{2} + \Pi n; n \in Z$

$\cos x = 1; x = 2\Pi n; n \in Z$

$\cos x = -1; x = \Pi + 2\Pi n; n \in Z$

$\sin x = a; x = (-1)^n \arcsin a + \Pi n; n \in Z$

$\sin x = 0; x = \Pi n; n \in Z$

$\sin x = 1; x = \frac{\Pi}{2} + \Pi n; n \in Z$ $\sin x = -1; x = -\frac{\Pi}{2} + \Pi n; n \in Z$ $\mathrm{tg} x = a; x = \mathrm{arctg} a + \Pi n; n \in Z$ $\mathrm{ctg} x = a; x = \mathrm{arctcg} a + \Pi n; n \in Z$

## 7. Многочлены и их корни

**Планиметрия.**

Свойства и признаки параллельных прямых

1. *Аксиома параллельных прямых*. Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.
2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.
3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.
4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом: внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют $180^{0}$.
5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные накрест лежащие углы, то прямые параллельны.
6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.
7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна $180^{0}$, то прямые параллельны.
   *Теорема Фалеса.* Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла то же отложатся равные отрезки.

*Теорема о пропорциональных отрезках.* Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.

**Треугольник.**

*Признаки равенства треугольников.*

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника. То такие треугольники равны.
2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

*Признаки равенства прямоугольных треугольников.*

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из нее.

1. Сумма внутренних углов треугольника равна $180^0$.
2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.
3. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180^0$(n-2).
4. Сумма внешних углов n-угольника равна $360^0$.
5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.
6. Угол между биссектрисами смежных углов равен $90^0$.
7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

*Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника*.

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
2. Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.
3. В равнобедренном треугольнике биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию, совпадают.
4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, то он является равнобедренным.

*Неравенство треугольника и следствия из него.*

1. Сумма двух сторон треугольника больше третьей его стороны.
2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.
3. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.
4. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.
6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то: 1)перпендикуляр короче наклонных; 2) большей наклонной соответствует большая проекция и наоборот.

*Средняя линия треугольника*. Отрезок, соединяющий середины двух любых сторон треугольника называется средней линией треугольника.

Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна его половине.

*Теоремы о медианах треугольника.*

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1 начиная от вершины.
2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.
3. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

*Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.* Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в оной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

*Теорема о высотах треугольника.* Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

*Теорема о биссектрисах треугольника.* Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

*Свойство биссектрисы треугольника.* Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

*Признаки подобия треугольников.*

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника. То такие треугольники подобны.

*Площади подобных треугольников.*

1. Отношение площадей прямоугольных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.
2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся, как произведения сторон, заключающих эти углы.

*Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.*

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.
2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.
3. Катет прямоугольного треугольника, расположенный напротив угла в $30^0$ равен половине гипотенузы.
4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то напротив него расположен угол в $30^0$.
5. $R=\frac{c}{2}; r=\frac{a+b-c}{2}=p-c$, где a и b- катеты, c-гипотенуза прямоугольного треугольника, R и r – радиусы описанной и вписанной окружности.

*Теорема Пифагора.* Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

*Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.* Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

*Метрические соотношения в треугольнике.*

1. *Теорема косинусов*. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.
2. *Следствие из теоремы косинусов*. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
3. *Формула для медианы треугольников*. Если m- медиана, треугольника, проведенная к стороне с, то $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где $a$ и $b$ $-$ остальные стороны треугольника.
4. *Теорема синусов.* Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.
5. *Обобщенная теорема синусов*. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

*Формулы площади треугольника.*

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.
2. Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.
3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.
4. Площадь треугольника равна произведению трех его сторон , деленному на учетверенный радиус описанной окружности.
5. Формула Герона.$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p- полупериметр, a, b, c- стороны треугольника.

*Элементы равностороннего треугольника.*

Пусть h, S, R, r – высота, площади, радиусы описанной и вписанной окружности равностороннего треугольника со стороной a. Тогда $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

**Четырехугольник.**

*Параллелограммом* называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

*Свойства и признаки параллелограмма.*

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся в точке пересечения пополам.
5. Если противоположные стороны четырехугольника равны, то этот четырехугольник параллелограмм.

6. Если две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
7. Если диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.

*Свойство середин сторон четырехугольника.*

Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырехугольника.

*Прямоугольником* называется параллелограмм с прямым углом.

*Свойства и признаки прямоугольника.*

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.

*Квадратом* называется прямоугольник, все стороны которого равны.

*Ромбом* называется четырехугольник, все стороны которого равны.

*Свойства и признаки ромба.*

1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.
3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.
4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм – ромб.

*Трапецией* называется четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны называют основаниями.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

*Свойства трапеции.*

1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.
3. Точка пересечений диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны.

*Свойства и признаки равнобедренной трапеции.*

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.
2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.
4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагоналей – полусумме оснований.

*Формулы площади четырехугольника.*

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

2. Площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними.
3. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.
4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
6. Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.
7. Формула Герона для четырехугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $a, b, c, d$ − стороны четырехугольника, $p$ − полупериметр, $S$ − площадь.

*Подобные фигуры.*

1. Отношение соответствующих элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.
2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

*Правильный многоугольник.*

Пусть $a_n$ – сторона правильного n- угольника, а $r_n$, $R_n$ – радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n},\ a_n = 2tg\frac{180^0}{n}r_n,\ r_n = R_n\cos\frac{180^0}{n}$$

**Окружность.**

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, удаленных от данной точки, называемой центром окружности, на одно и то же положительное расстояние, называемое радиусом.

*Основные свойства окружности.*

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.
2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.
3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.
4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.
5. Хорды окружности, удаленные от центра на равные расстояния, равны.
6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.
7. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.
8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.
9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

*Замечательные свойства окружности.*

1. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.
2. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90°$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.
3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей без концов этих дуг.

Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется *касательной к окружности.*

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
2. Если прямая а, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то прямая а – касательная к окружности.
3. Если прямые, проходящие через точку М , касаются окружности в точках А и В, то МА=МВ и ∠АМО=∠ВМО, где точка О - центр окружности.
4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

*Касающиеся окружности.* Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку ( точку касания).

1. Точка касания двух окружностей расположена на одной прямой с центрами этих окружностей.
2. Окружности радиусов r и R с центрами в точках $O_1$ и $O_2$ касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $r+R=O_1O_2$
3. Окружности радиусов r и R (r<R) с центрами в точках $O_1$ и $O_2$ касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $r-R=O_1O_2$
4. Окружности с центрами в точках $O_1$ и $O_2$ касаются внешним образом в точке К. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках А и В и пересекается с общей касательной, проходящей через точку К, в точке С. Тогда ∠АКВ=90° И $\angle O_1CO_2=90°$.
5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключенной между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

*Углы, связанные с окружностью.*

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на нее опирающегося.
2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.
3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.
5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.
6. Угол между касательной и хордой равен половине угловой величине дуги, заключенной между ними.

*Свойства хорд окружности.*

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.
2. Произведения длин отрезков хорд АВ и CD окружности, пересекающихся в точке Е , равны, то есть $|AE|\cdot|EB|=|CE|\cdot|ED|$.

*Вписанные и описанные окружности.*

1. Центры вписанной и описанной окружности правильного треугольника совпадают.
2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – середина гипотенузы.

3. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.
4. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.
5. Если сумма четырехугольника противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.
6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.
7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.
8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

*Теорема о касательной и секущей и следствия из нее.*

1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.
2. Произведение всей секущей на ее внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

*Длина окружности*: $L = 2\pi R$.

*Площадь круга*: $S = \pi R^2$.

**<u>Стереометрия.</u>**

*Аксиомы стереометрии.*

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и при том только одна.
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

*Следствия из аксиом.*

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.
2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.
3. Через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

*Параллельность в пространстве.*

1. <u>Признак параллельности прямой и плоскости.</u> Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α.
2. Если через прямую a, параллельную плоскости α, провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b , то прямые a и b параллельны.
3. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a, пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b.
4. <u>Транзитивность параллельности прямых в пространстве.</u> Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

5. Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.
7. Транзитивность параллельности плоскостей. Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γто плоскость α параллельна плоскости γ.
8. Отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, равны.
9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

*Скрещивающиеся прямые.*

1. Признак скрещивающихся прямых. Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b – скрещивающиеся прямые.
2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная параллельных плоскостей.
3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.
4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми , соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M.
5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

*Параллельное проектирование.*

1. Прямая, непараллельная проектирующей, переходит в прямую.
2. Пара параллельных прямых, непараллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.
3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.
4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой ее параллельной проекции на эту плоскость.
5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

*Координаты и векторы в пространстве.*

1. Координаты вектора равны разности соответствующих координат конца и начала данного вектора.
2. Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллиниарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k\vec{b}$, где k – некоторое число.
3. Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$, где x, y – некоторые числа.
4. Любой вектор можно единственным образом разложить по трем некомпланарным векторам.
5. Если M – середина AB, то $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.
6. Если M – середина AB,N– середина стороны CD, то $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}}{2}$.
7. Если M – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{oc}}{3}$.
8. Если M – точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD, то $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{oc}+\overrightarrow{OD}}{4}$.

9. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.
10. *Свойства скалярного произведения векторов.*
    a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
    b) $\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$
    c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
    d) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$
    e) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2(\vec{a}\vec{b}) + \vec{b}^2$
    f) $(\vec{a}\vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллиниарны.
    g) Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0.
11. *Расстояние между точками* $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ равно $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
12. *Угол между ненулевыми векторами.* Если $\varphi$ - угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ $(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}$ $(x_2, y_2, z_2)$, то $\cos\varphi = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.
13. *Уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a;b;c)$(вектор нормали), имеет вид: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
14. *Параметрические уравнения прямой,* проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a;b;c)$ (направляющий вектор), имеют вид: $\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$
15. *Уравнение прямой, проходящей через две точки* $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{z-z_1}{z-z_1}$
16. *Прямая, как пересечение двух плоскостей,* задается в виде системы уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0' \end{cases}$ где $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0, A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ и коэффициенты при соответствующих переменных непропорциональны.
17. *Угол между плоскостями.* Если $\varphi$ - угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то $\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
18. *Уравнение плоскости в отрезках.* Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c), a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0,$ то ее уравнение можно представить в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{d} = 1$
19. *Расстояние от точки до плоскости.* Если $\rho$ – расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то $\rho = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

*Перпендикулярность прямой и плоскости.*

1. *Признак перпендикулярности прямой и плоскости.* Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.
2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.
3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая так же перпендикулярна этой плоскости.
4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.
6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.
7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.
8. *Теорема о трех перпендикулярах*. Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.
9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то
   1) Перпендикуляр короче наклонных
   2) Равные наклонные имеют равные ортогональные проекции
   3) Большей наклонной соответствует большая ортогональная проекция
   4) Из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше
10. *Теорема об угле прямой с плоскостью.* Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.
11. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.
12. Геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.
13. Геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

*Двугранный угол.*

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.
2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудаленных от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.
3. *Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей*. Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.
4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой также перпендикулярной этой плоскости.

*Многогранные углы.*

1. Плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.
2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $360^0$.

*Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы.*

1. Сечение сферы плоскостью, удаленной то центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.
2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в точку касания.
3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в точку касания.
4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.
5. Отрезки касательных прямых, проведенных к сфере из одной точки, равны между собой.

6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.
7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

*Правильная пирамида.*

1. Если ABCD – правильная треугольная пирамида с вершиной D, высотой DM и стороной основания *a*, а $A_1$, $B_1$, $C_1$ – середины сторон соответственно BC, AC, AB, то
   a) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ - угол бокового ребра с плоскостью основания;
   b) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ – линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания.
   c) $\angle AFB$ (где F- основание перпендикуляра, опущенного из вершины А основания на боковое ребро DC) – линейный угол между боковыми гранями пирамиды;
   d) $\mathrm{AA}_1 = \mathrm{BB}_1 = \mathrm{CC}_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ - высота треугольника основания;
   e) $\mathrm{AM} = \mathrm{BM} = \mathrm{CM} = \frac{2}{3}\mathrm{AA}_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ – ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;
   f) $\mathrm{MA}_1 = \mathrm{MB}_1 = \mathrm{MC}_1 = \frac{\mathrm{AA}_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ – ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;
   g) $C_1A$ –общий перпендикуляр противоположных ребер АВ и СД.
2. Противоположные ребра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.
3. Высота правильного тетраэдра с ребром *a* равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.
4. Если PABCD – правильная четырехугольная пирамида с вершиной P, высотой PM и стороной основания *a* , а $A_1$, $B_1$, $C_1$ , $D_1$– середины сторон соответственно AB, BC, CD,AD, то
   a) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ - угол бокового ребра с плоскостью основания;
   *b)* $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ – линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания.
   *c)* $\angle DFB$ (где F- основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) – линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;
   *d)* $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ - линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;
   *e)* $\mathrm{AM} = \mathrm{BM} = \mathrm{CM} = DM = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ – ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания
   *f)* $\mathrm{MA}_1 = \mathrm{MB}_1 = \mathrm{MC}_1 = MD_1 = \frac{a}{2}$ - ортогональная проекция апофемы на плоскость основания.
   *g)* $FM -$ общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP.
5. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.
6. Пусть *a* – ребро правильного тетраэдра, R и r –радиусы описанной и вписанной сферы,V – объем тетраэдра. Тогда $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}, r = \frac{a\sqrt{6}}{12}, V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$/

*Произвольная пирамида.*

1. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

2. Если все боковые ребра пирамиды образуют с основанием равные углы или если все боковые ребра равны, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.
3. Теорема о медианах тетраэдра. Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины.
4. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.
5. В пирамиде и в конусе площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины.

*Параллелепипед.*

1. Параллелепипед называется прямым, если его боковые ребра перпендикулярны основанию.
2. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным.
3. Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда:
   a) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны,
   b) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен квадрату расстояний трех его измерений (длин трех ребер с общей вершиной).
4. Свойства граней и диагоналей параллелепипеда. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
5. Диагональ $AC_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника $A_1BD$ и делится ею в отношении 1:2, считая от точки A.

*Площади поверхности многогранников.*

1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.
2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади ее основания, деленной на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

## Учебно – тренировочные тесты.

Вариант I

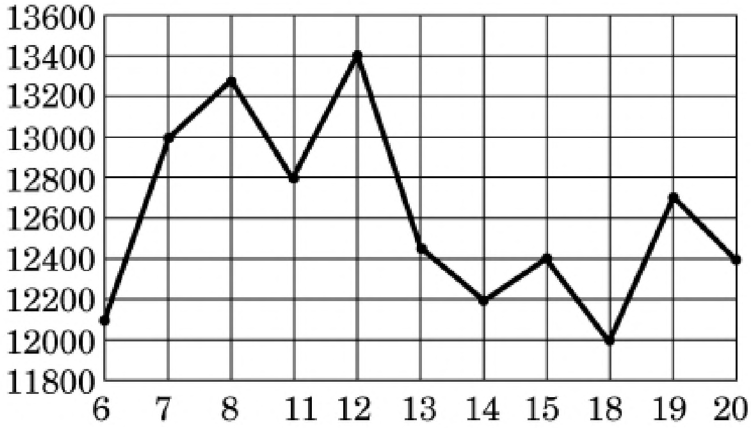
### Часть 1

Вопрос B1

Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

Вопрос B2

На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.




Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).

Вопрос B3

Найдите корень уравнения $\log_2(6 + x) = 4$.

Вопрос B4

**В треугольнике $ABC$:** $C=90°, AB = 40, AC = 4\sqrt{51}$. **Найдите $\sin A$.**

Вопрос B5

Семья из трех человек едет из Москвы в г. Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине

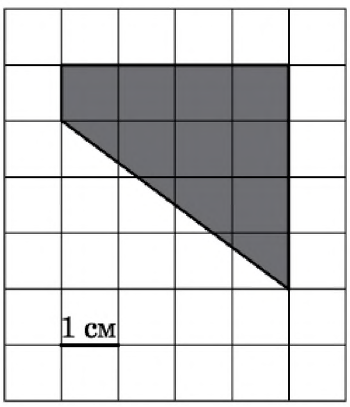
Билет на поезд на одного человека стоит 740 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на

100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19 руб. за литр.

Сколько рублей будет стоить самая дешевая поездка для этой семьи?

Вопрос B6

Н.а клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

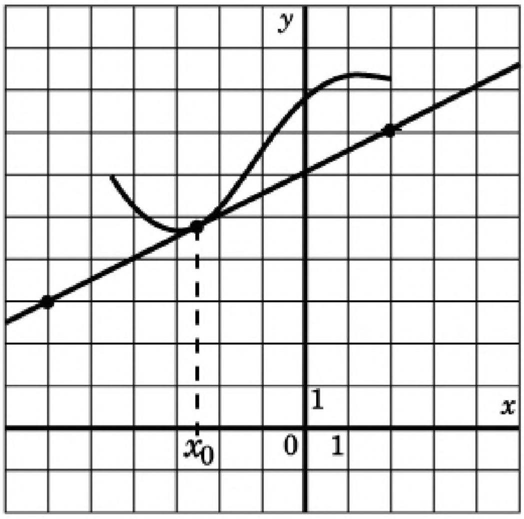



Вопрос B7

Найдите значение выражения: $3^9 \cdot 2^6 : 6^5$.

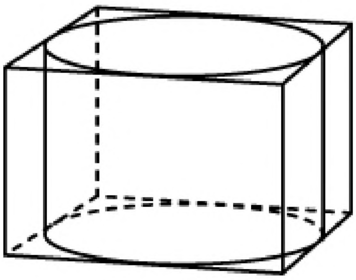
Вопрос B8

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$.
Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




Вопрос B9

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра,
радиус основания которого равен 3. Объем параллелепипеда равен 18. Найдите высоту цилиндра.



Вопрос B10

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = çST^4$, где $ç = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь $S$ измеряется в квадратных метрах, температура $T$ — в градусах Кельвина, а мощность $P$ — в ваттах.
Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = (1/228) \cdot 10^{21}$ м$^2$, а излучаемая ею мощность $P$ не менее $1{,}5625 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Ответ дайте в градусах Кельвина.

Вопрос B11

Найдите наименьшее значение функции $y = (x–7)e^{x-6}$ на отрезке [5;7].

Вопрос B12

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 72 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 6 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 6 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

## Часть 2

Вопрос C1

а) Решите уравнение $(1 + tg^2x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -2\sqrt{3}.$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Вопрос С2

В правильной четырехугольной призме пирамиде $SABCD$ с вершиной $S$ боковые ребра вдвое длиннее сторон основания. Точка $M$ – середина ребра $SC$ . Найдите угол между плоскостью $ADM$ и плоскостью основания.

Вопрос С3

Решите систему:

$$\begin{cases} 625^{x} - 25^{2x-1} \geq 7, \\ log_{2x+1}(4x^2 - 4x + 1)log_{1-2x}(2 + 4x) \geq 2. \end{cases}$$

Вопрос С4

В описанной около окружности равнобокой трапеции основания относятся как 1: 2 . Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка $H$ — основание высоты. Из точки $H$ опущен перпендикуляр $HE$ на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка $E$ делит боковую сторону?

Вопрос С5

При каких $a$ уравнение $|x^2 - x + \alpha| + |x| = 9$ имеет ровно три корня?

Вопрос С6

Числа от 2 до 11 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:
а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания?
б) пять чисел в порядке возрастание или в порядке убывания?
в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

Вариант II

## Часть 1

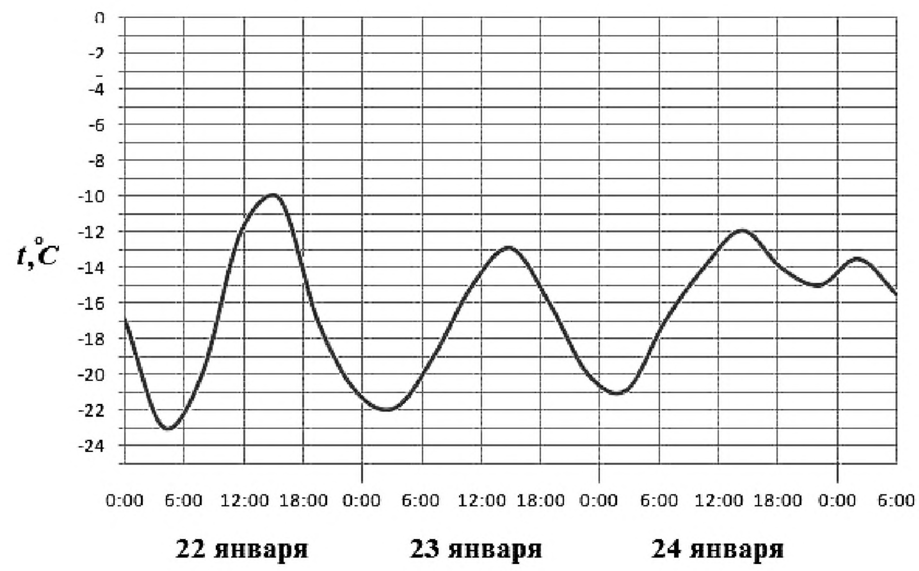
Вопрос В1

Теплоход рассчитан на 650 пассажиров и 20 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 50 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Вопрос В2

На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия.

Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 23 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.




Вопрос B3

Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{3x-58}}=\frac{1}{10}$

Вопрос B4

В треугольнике $ABC$: $AC = BC$, $AB = 6$, $\cos A = 3/5$.

Найдите высоту $CH$.

Вопрос B5

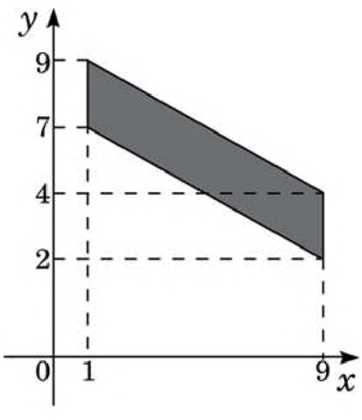
Для остекления веранды требуется заказать 70 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,25 м$^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол.

| *Фирма* | *Цена стекла (руб. за 1 м$^2$)* | *Резка стекла (руб. за одно стекло)* | *Дополнительные условия* |
|---|---|---|---|
| *А* | *310* | *10* | |
| *Б* | *300* | *15* | |
| *В* | *370* | *5* | *При заказе на сумму больше 6200 руб. резка бесплатно* |

Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Вопрос B6

Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (1;7), (9;2), (9;4), (1;9).

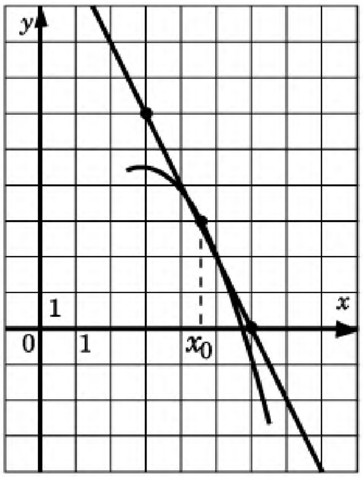


Вопрос B7

Найдите значение выражения $\log_{11}12{,}1 + \log_{11}10$.

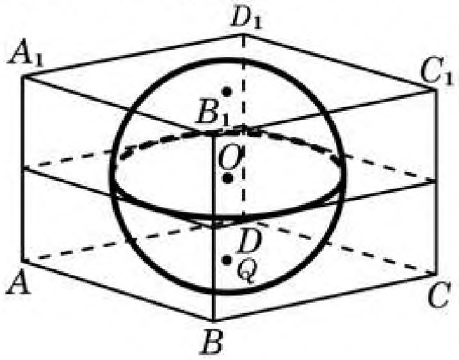
Вопрос B8

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$.
Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




Вопрос B9

Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 6.




Найдите объем параллелепипеда.

Вопрос B10

При температуре 0° С рельс имеет длину $l_0$ = 20 м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°) = l_0(1 + a\cdot t°)$,
где $a = 1{,}2\cdot 10^{-5}(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия).
При какой температуре рельс удлинится на 3мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Вопрос B11

Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + 5$ на отрезке [3/4;5/4]

Вопрос B12

Из А в В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 18 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 108 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом.

Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 63 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

## Часть 2

Вопрос C1

а) Решите уравнение $(1 + tg^2x)\, sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Вопрос С2

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной $S$ все
ребра равны между собой. Точка $M$ – середина ребра $SC$ . Найдите угол между плоскостью $ADM$ и плоскостью основания.

Вопрос С3

Решите систему:

$$\begin{cases} 243^x - 3^{5x-2} \geq 7, \\ log_{x+1}(4x^2 - 4x + 1)log_{1-2x}(6x + 6) \geq 2. \end{cases}$$

Вопрос С4

В описанной около окружности равнобокой трапеции основания относятся как 3:5 . Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка $H$ — основание высоты. Из точки $H$ опущен перпендикуляр $HE$ на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка $E$ делит боковую сторону?

Вопрос С5

При каких значениях $a$ уравнение $|x^2 + x + \alpha| + |x| = 10$ имеет ровно три корня.

Вопрос С6

Числа от 1 до 10 записаны в строчку в некотором порядке. Всегда ли можно вычеркнуть несколько чисел так, чтобы осталось:

а) три числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

б) пять чисел в порядке возрастание или в порядке убывания?

в) четыре числа в порядке возрастания или в порядке убывания?

**Перечень учебных пособий для подготовки к экзамену.**


1. Семенов А. В. Единый государственный экзамен. Математика. Комплекс материалов для подготовки учащихся. Учебное пособие. 2017г.
2. Шестаков С.А., Ященко И.В. ЕГЭ-2019. Математика. Базовый уровень. Методические указания – М: МЦНМО, 2018 г.
3. Ященко И.В. Математика. Большой сборник тематических заданий для подготовки к ЕГЭ-2018. Профильный уровень / под ред. И.В. Ященко: АСТ, 2018.
4. Шабунин М. Математика. Пособие для поступающих в вузы. – М.: Бином, 2017
5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / В.К.Егерев, В.В. Зайцев, Б.А.Кордемский и др.; Под.ред. М.И.Сканави – М.:ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2015